2.2 Interpolation

2.2.1 Interpolation de Lagrange

Théorème 2.5 (Polynôme d'interpolation de Lagrange) *Soient $c_0, c_1, \dots, c_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ (pas forcément distincts). Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(c_i) = a_i$ pour $i = 0, \dots, n$. Ce polynôme est donné par*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j\neq i}(X - c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i - c_j)}\, a_i \ .$$

Par exemple, le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = -1$ est

$$P = 2\,\frac{X(X-1)}{(-1)\times(-2)} + \frac{(X+1)(X-1)}{1\times(-1)} - \frac{(X+1)X}{2\times 1} \ .$$

2.2.2 Polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein de degré n sont les polynômes

$$B_{n,i} = \binom{n}{i} X^i (1-X)^{n-i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n.$$

Les polynômes de Bernstein sont ce qu'on trouve en développant $(X + (1-X))^n = 1$ suivant la formule du binôme.

Théorème 2.6 *Les polynômes de Bernstein de degré n forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Si l'on décompose un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ dans cette base :*

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n,i} \ ,$$

alors le nombre de racines (comptées avec multiplicité) de P dans l'intervalle $]0,1[$ est inférieur ou égal au nombre de changement de signes dans la suite $a_0, \dots, a_n$, et la différence est paire.

Les polynômes de Bernstein (surtout de degré 3) sont utilisés pour la construction des splines, un outil esssentiel de dessin de courbes. Le théorème ci-dessus et des techniques de subdivision d'intervalles, utilisant l'algorithme de De Casteljau, sont à la base des algorithmes les plus performants d'isolation de racines réelles.

Exercice 2.9

Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(-2) = 7$, $P(1) = 2$ et $P(3) = 1$, et le mettre sous la forme $aX^2 + bX + c$.

Exercice 2.10

Soient $c_0, c_1, \dots, c_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. On pose, pour $i = 0, \dots, n$,

$$L_i = \frac{\prod_{j\neq i}(X - c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i - c_j)} \ .$$

Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Exercice 2.11

On définit les polynômes $\binom{X}{k} \in \mathbb{R}[X]$ pour $k \in \mathbb{N}$ par $\binom{X}{0} = 1$, $\binom{X}{1} = X$ et $\binom{X}{k} = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \geq 2$.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$, et on définit par récurrence $\Delta^k P = \Delta(\Delta^{k-1}P)$ pour $k \geq 2$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est bien le coefficient binomial (avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$).
2. Vérifier que pour tout polynôme non constant P, $\deg(\Delta P) = \deg(P) - 1$. En déduire que $\deg(P) \leq k$ si et seulement si $\Delta^{k+1}P = 0$.
3. Vérifier que si $\Delta P = \Delta Q$ et $P(0) = Q(0)$, alors $P = Q$.
4. Vérifier que $\Delta\binom{X}{k} = \binom{X}{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.
5. Vérifier que $\Delta(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Delta P_i$.
6. Etablir par récurrence sur le degré de P que pour tout polynôme P de degré $\leq k$, on a
$$P(X) = P(0) + \Delta P(0)\binom{X}{1} + \Delta^2 P(0)\binom{X}{2} + \cdots + \Delta^k P(0)\binom{X}{k}.$$
7. Dans le tableau suivant, chaque nombre est la différence entre celui au-dessus à droite et celui juste au-dessus.

-4	0	1	1	2	6	15
4	1	0	1	4	9	
-3	-1	1	3	5		
2	2	2	2			
0	0	0				

   Expliquer pourquoi la première ligne de ce tableau est formée des valeurs d'un polynôme P du troisième degré en 0, 1, 2, …, 6. Que valent $P(7)$, $P(8)$? Exprimer P en fonction des $\binom{X}{k}$.

Exercice 2.12

Montrer que $B_{n,i} = XB_{n-1,i-1} + (1-X)B_{n-1,i}$, si l'on convient que $B_{n-1,-1} = B_{n-1,n} = 0$. Montrer, avec la même convention, que $B'_{n,i} = (B_{n-1,i-1} - B_{n-1,i})$.

Exercice 2.13

Montrer que $B_{n,i}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n,i}$, alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\min(a_0, \ldots, a_n) \leq P(x) \leq \max(a_0, \ldots, a_n)$.